MATEMÁTICA DISCRETA II **3 Julio 2017** DMATIC ETSI Informáticos, UPM	1^{er} APELLIDO: 2^{o} APELLIDO: NOMBRE: N^{o} MATRÍCULA:	TIEMPO: **2 horas** PUNTOS: NOTA FINAL:

1. Se pide:

   (a) (**0,7 puntos**) ¿Existe un grafo con 7 aristas y 10 vértices de los cuales 5 tienen grado uno, 4 son de grado par (no nulo) y 1 es de grado impar mayor que uno? Razona tu respuesta.

   (b) (**1 punto**) Se considera una red R cuyos vértices son 16 puntos del plano, $V = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 0 \leq a, b \leq 3\}$, y cuyas aristas conectan los puntos (a,b) y (c,d) de V si $c = a \pm 1$ y $d = b \pm 1$. Dibuja el grafo R. ¿Es R conexo? En caso negativo, halla sus componentes conexas. ¿Es R o alguna de sus componentes conexas bipartito?

SOLUCIÓN. (a) La respuesta es "NO", de lo contrario se verificaría:

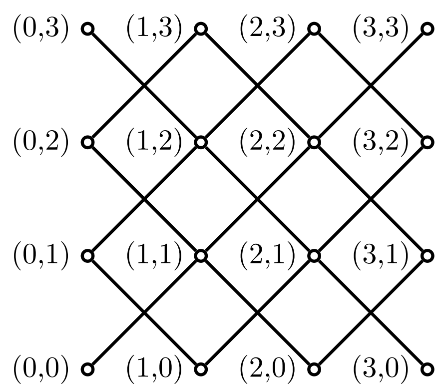
$$2 \times 7 = 14 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_4 + 2k_5 - 1 = 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) + 4,$$

de donde:

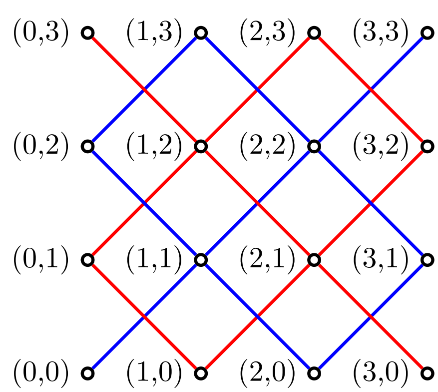
$$5 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5.$$

Pero $k_i \geqslant 1$ y en particular $k_5 \geqslant 2$, lo que es una contradicción.

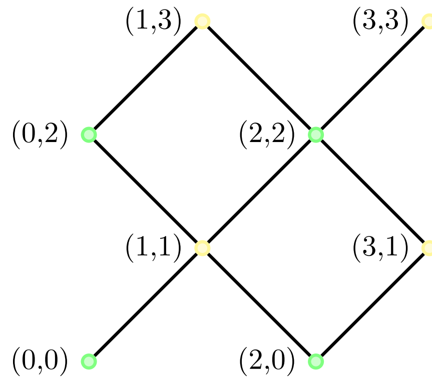
(b) El grafo es el siguiente:



El grafo no es conexo. Tiene dos componentes conexas que dibujadas en colores diferentes son:



Las dos componentes son isomorfas y las dos bipartidas. La siguiente figura muestra una coloración con dos colores de una de las componentes.



□

2) Realiza los siguientes apartados con el grafo ponderado G cuya matriz de pesos es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 & \infty & 3 \\ 4 & 0 & \infty & 3 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 & \infty & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 5 & \infty & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla el camino mínimo desde C hasta B utilizando el algoritmo más eficiente visto en clase para resolver este problema.
Como se trata de encontrar el camino mínimo de un vértice a otro y todos los pesos son positivos, el algoritmo más eficiente es el de Dijkstra, ya que es el de menor complejidad entre los que resuelven este problema.

DA	DB	DC	DD	DE	DF		p*A*	p*B*	p*C*	p*D*	p*E*	p*F*
∞	∞	**0**	∞		∞		-	-	**-1**	-	-	-
2	∞		4	∞	7		**C**	-		C	-	C
	6		**3**	∞	5			A		**A**	-	A
	6			7	**5**			A			D	**A**
	6			7				**A**			D	

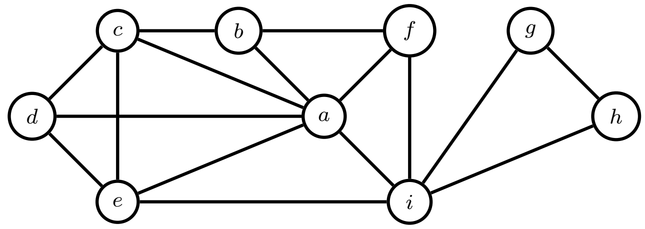
El camino más corto desde C hasta B es CAB y tiene longitud 6.

b) Al grafo G se le ha aplicado un algoritmo de construcción de un árbol generador de peso mínimo y en las dos primeras iteraciones han sido seleccionadas las aristas EF y AF, ¿cuál es el algoritmo aplicado? Responde razonadamente y completa el proceso hasta construir un árbol generador de peso mínimo.
Se ha aplicado el algoritmo de Prim, ya que si hubiera sido el de Kruskal, la primera arista que se habría añadido habría sido AD que tiene peso 1
El estado actual de las estructuras: Aristas: {EF, AF} y primera fila de la tabla de ejecución del algoritmo.
Aristas del árbol generador de peso mínimo: {EF, AF, AD, AC, BD}
.

V_r	F, E, A, D,.C		
V_n	B	C	D
	4 A	2 A	**1** **A**
	3 D	**2** **A**	
	3 **D**		

Nota: No se permite el uso de dispositivos electrónicos.

3. Realiza los siguientes apartados con el grafo H dado por la figura:



(a) **(0,9 puntos)** Halla el radio, el diámetro y el subgrafo centro de H.

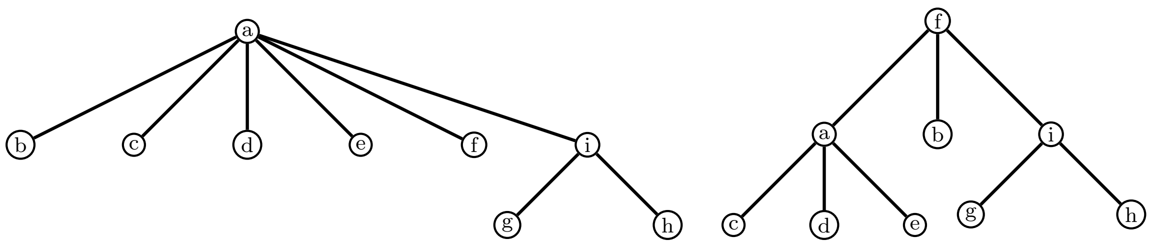
(b) **(0,6 puntos)** Halla dos árboles de búsqueda en anchura en H que no sean isomorfos y tengan igual altura.

(c) **(0,6 puntos)** ¿H es Hamiltoniano o tiene un camino Hamiltoniano abierto? Justifica las respuestas.

(d) **(0,6 puntos)** Sea K el grafo que se obtiene al eliminar del grafo H la arista $\{b, f\}$. Halla, si existe, un recorrido euleriano cerrado o abierto en K utilizando un algoritmo apropiado.

SOLUCIÓN. (a). Se tiene rad $(H) = 2$, $\text{diam}(H) = 3$ y el subgrafo centro es el subgrafo inducido por los vértices cuya excentricidad es 2, esto es, $C(H) = (V_C, A_C)$, donde $V_C = \{a, e, f, i\}$ y $A_C = \{\{a, f\}, \{a, i\}, \{a, e\}, \{f, i\}, \{e, i\}\}$.

(b). Dos árboles de búsqueda en anchura no isomorfos de altura dos son los siguientes:



(c) El vértice i es un vértice-corte del grafo H y, por tanto, H no puede ser hamiltoniano. Si existe un camino hamiltoniano abierto: $g\{g, h\}h\{h, i\}i\{i, e\}e\{e, d\}d\{d, c\}c\{c, b\}b\{b, a\}a\{a, f\}f$.

(d) El grafo K no es euleriano puesto que tiene dos vértices de grado impar. Es semi-euleriano y existe un recorrido euleriano abierto que comienza y termina en un vértice de grado impar. Utilizando el algoritmo de Fleury desde el vértice d, se obtiene un recorrido euleriano que contiene las 15 aristas del grafo K:

$$d\{d, a\}a\{a, b\}b\{b, c\}c\{c, a\}a\{a, e\}e\{e, c\}c\{c, d\}d\{d, e\}e\{e, i\}i\{i, a\}a\{a, f\}f\{f, i\}i\{i, g\}g\{g, h\}h\{h, i\}i$$

□

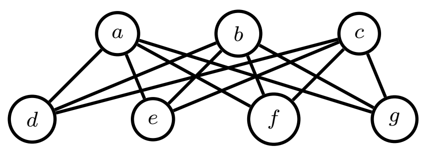
4. (**1 punto**) Determina, utilizando el algoritmo apropiado, si la sucesión $[4, 4, 4, 3, 3, 3, 3]$ es gráfica (para grafos simples) y, en caso afirmativo, dibuja un grafo con dicha sucesión de grados. Demuestra que no existe ningún grafo simple, bipartito y planar con dicha sucesión de grados.

Solución. Aplicamos el algoritmo para sucesiones gráficas:

4	4	4	3	3	3	3
	3	3	2	2	3	3
	3	3	3	3	2	2
		2	2	2	2	2
			1	1	2	2
			2	2	1	1
				1	0	1
				1	1	0
					0	0

Por consiguiente, existe un grafo simple con $n = 7$ vértices y la sucesión de grados $[4, 4, 4, 3, 3, 3, 3]$. Dicho grafo tiene que ser conexo. En efecto, si tiene dos componentes conexas, entonces una de las componentes tiene que incluir al menos 5 vértices por ser el grado de algún vértice ≥ 4. De modo que la otra componente tiene a lo más 2 vértices, los cuales no pueden tener grado ≥ 3. Si el grafo es bipartito, entonces no contiene ciclos de longitud impar. Un grafo conexo planar y que no contiene ciclos de longitud 3 satisface la desigualdad $q \leq 2n - 4$. En este caso, el grafo tiene $q = 12$ aristas y se tiene que $12 \nleq 7 \cdot 2 - 4 = 10$. Por tanto, dicho grafo no puede ser planar.

Un ejemplo de grafo con la lista de grados $[4, 4, 4, 3, 3, 3, 3]$ es el grafo bipartito completo $K_{3,4}$:



□

MATEMÁTICA DISCRETA II

Ejercicio 5

(1 punto) Enuncia la fórmula de Euler para grafos conexos planos. Demuestra que un grafo conexo plano cuyas caras o regiones (incluyendo la cara no acotada) están limitadas por ciclos de longitud 3 y con grado máximo de los vértices igual a 5 tiene a lo sumo 12 vértices.

Solución

Si $G = (V, A)$ es un grafo conexo y planar con n =card V, q =card A, c=card {caras de una representación plana de G} entonces $n - q + c = 2$.

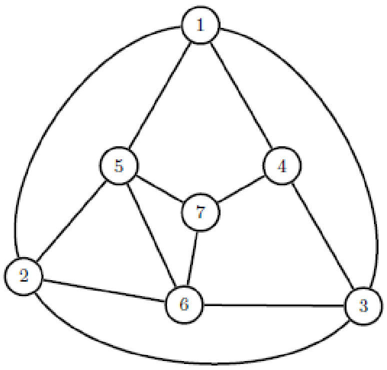
A partir de las relaciones siguientes

$$\begin{cases} 2q = \sum_{v\in V} d(v) \leq 5n \\ 2q = \sum_{R\in G} d(R) = 3c \end{cases}$$

se tiene que $\begin{cases} c = 2 - n + q \\ 3c = 2q \end{cases}$ de donde $q = 3n - 6$ y a partir de $\begin{cases} q = 3n - 6 \\ 2q \leq 5n \end{cases}$ se sigue que $n \leq 12$.

Ejercicio 6

Sea el grafo G de la siguiente figura:



a) **(0,8 puntos)** Define el concepto de número de independencia de un grafo. Halla el número de independencia del grafo G. Escribe las relaciones que conozcas entre el número de independencia, el número cromático y el grado máximo de un grafo. Determina el número cromático de G.

b) **(0,8 puntos)** Realiza una coloración de los vértices de G utilizando el algoritmo de coloración de Brelaz.

Solución

a) Un subconjunto $S \subset V$ es independiente si no hay dos vértices de S adyacentes entre sí.

$\alpha(G) \equiv$ número de independencia de $G \equiv$ cardinal del máximo conjunto independiente.

Para hallar un conjunto de vértices S que sea independiente maximal en G y de cardinal máximo, aplicamos el algoritmo visto en clase mediante el que se obtiene $S = \{4, 2\}$ cuyo cardinal es 2, esto es, el número de independencia del grafo es $\alpha(G) = 2$.

Se tienen las siguientes relaciones entre el número de independencia, el número cromático y el grado máximo de un grafo G que no es completo y no es un ciclo de longitud impar

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq \Delta(G)$$

MATEMÁTICA DISCRETA II

En el grafo *G*, se tiene que $\frac{7}{2} \leq \chi(G) \leq 4$, por tanto, el número cromático de *G* es 4.

b)

Vértices	**1**	**2**	**3**	**5**	**6**	**4**	**7**
Grados	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**
Grado-color		1	1	1	0	1	0
Grado-color			2	2	1	1	0
Grado-color				2	2	2	0
Grado-color					2	2	1
Grado-color						2	2
Grado-color							3
Orden	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**
Color	**A**	**B**	**C**	**C**	**A**	**B**	**D**